Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Fonction et suite

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & si \quad x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On donne ci-contre le tableau de variation de f

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}-1$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0<U_n\leq 1$

2°) a) Montrer que pour tout n ∈ IN on a : $U_{n+1}\leq \frac{1}{2}U_n$

b) En déduire que U est décroissante et que $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suite U.

1°) pour $n=0$ $\quad 0<U_0=1\leq 1$ (Vrai)

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $0<U_n\leq 1$ et

montrons que $0<U_{n+1}\leq 1$.

On a $0<U_n\leq 1$

or f est croissante sur $[0,1]$

Donc $f(0)<f(U_n)\leq f(1)$

$\Rightarrow 0<U_{n+1}\leq \sqrt{2}-1\leq 1$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 1$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < u_n \leqslant 1$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = f(u_n) - \frac{1}{2}u_n$$

$$= \frac{\sqrt{1+u_n^2} - 1}{u_n} - \frac{1}{2}u_n$$

$$= \frac{2\sqrt{1+u_n^2} - 2 - u_n^2}{2u_n}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+u_n^2} - (2+u_n^2)}{2u_n} \times \frac{2\sqrt{1+u_n^2} + (2+u_n^2)}{2\sqrt{1+u_n^2} + (2+u_n^2)}$$

$$= \frac{4(1+u_n^2) - (2+u_n^2)^2}{2u_n(2\sqrt{1+u_n^2} + 2 + u_n^2)}$$

$$= \frac{4 + 4u_n^2 - 4 - 4u_n^2 - u_n^4}{2u_n(2\sqrt{1+u_n^2} + 2 + u_n^2)}$$

$$= \frac{-u_n^4}{2u_n(2\sqrt{1+u_n^2} + 2 + u_n^2)} \leqslant 0$$

Donc $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{2} u_n \leqslant u_n$

et $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$ $\Big\} \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$

Ainsi (u_n) est décroissante.

Mque $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- pour $n=0$ $\quad u_0 = 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ vrai

- soit $n \in \mathbb{N}$. supposons que $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

- $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{2} u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

or $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$

Donc $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$